10　練習問題

10. 1. 結晶構造および結晶方位

(1)　fcc 結晶のすべり系 $\{111\}\ <110>$ を表 1 に示す．結晶座標系 $\bar{x}_1-\bar{x}_2-\bar{x}_3$（または $[100]-[010]-[001]$）に対するすべり面およびすべり方向を図示せよ．

表 1　すべり系

Index	Notation*	Miller index
1	B4	$(11\bar{1})[101]$
2	B5	$(11\bar{1})[011]$
3	B2	$(11\bar{1})[1\bar{1}0]$
4	C1	$(1\bar{1}1)[110]$
5	C5	$(1\bar{1}1)[011]$
6	C3	$(1\bar{1}1)[10\bar{1}]$
7	D4	$(1\bar{1}\bar{1})[101]$
8	D1	$(1\bar{1}\bar{1})[110]$
9	D6	$(1\bar{1}\bar{1})[01\bar{1}]$
10	A3	$(111)[10\bar{1}]$
11	A6	$(111)[0\bar{1}1]$
12	A2	$(111)[1\bar{1}0]$

*Shchmid と Boa によるすべり系の識別記号

(2)　下記の問いに答えよ．まず，必要となる数式について，全ての成分を書き下して示せ．次に，Excel ファイル「単結晶」の水色のセルを埋めて計算を実行せよ．

(a) fcc 結晶のすべり面の単位法線ベクトル $\mathbf{m}^{(\alpha)}$ およびすべり方向の単位ベ

クトル $\mathbf{s}^{(\alpha)}$ の結晶座標系に関する成分 $\overline{m}^{(\alpha)}$，$\overline{s}^{(\alpha)}$ を求めよ．

(b) 材料座標から結晶座標への座標変換行列を求めよ．

(c) 上記で求めた座標変換行列を用いて，結晶座標の成分 $\overline{m}^{(\alpha)}$，$\overline{s}^{(\alpha)}$ を材料座標の成分 $\hat{m}^{(\alpha)}$，$\hat{s}^{(\alpha)}$ へ逆変換せよ．

(d) 極点図を求めよ．

(3) 表 2 には fcc 金属においてしばしば観察される集合組織成分の理想方位を示している．以下の問いに答えよ．

(a) 直交異方性を仮定して，表 2 の結晶方位と等価な 3 個の結晶方位を求めよ．

(b) 各理想方位の成分に対して，等価な 4 方位に対する極点図を図示せよ（4 方位の極点を一つの極点図にまとめて示す）．

表 2　fcc 金属の典型的な集合組織成分

	$(\varphi_1,\phi,\varphi_2)$ [°]
copper 方位	50, 65, 64
S 方位	31,37,63
brass 方位	35, 45, 0
cube 方位	0,0,0
Goss 方位	90, 45, 0

10.2　単結晶の弾塑性

(1) すべり系 α に作用する分解せん断応力は，$\mathbf{m}^{(\alpha)}$ 面の $\mathbf{s}^{(\alpha)}$ 方向の応力成分である．つまり，$\tau^{(\alpha)} = \mathbf{s}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}^{(\alpha)}$ である．

(a) $\tau^{(\alpha)} = \mathbf{s}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}^{(\alpha)}$ を全ての成分について書き下して示せ．

(b) Excel ファイル「単結晶」の緑色のセルを埋めよ．

(c) $\sigma_{11} = 1$，その他はゼロとして，表 2 の 5 結晶方位に対して，分解せん断応力を求めて比較せよ．

(d) copper 方位に対して，$\sigma_{11} = 1$ でその他はゼロの場合，$\sigma_{11} = 1$，

$\sigma_{12}=\sigma_{21}=1$ でその他はゼロの場合，$\sigma_{12}=\sigma_{21}=1$ でその他はゼロの場合の 3 パターンについて，各すべり系の分解せん断応力を計算し，比較せよ．

(2) 一つのすべり系が活動した場合，速度勾配の塑性成分は，$\mathbf{L}^{\mathrm{p}}=\dot{\gamma}\mathbf{s}\otimes\mathbf{m}$ と書き表せる．次の問いに答えよ．

(a) $\mathbf{t}=\mathbf{s}\times\mathbf{m}$ として $\mathbf{s}-\mathbf{m}-\mathbf{t}$ を基底ベクトルとする座標系 $\tilde{x}_1-\tilde{x}_2-\tilde{x}_3$ を考える．この座標系に対する $\mathbf{L}^{\mathrm{p}}$ の成分 $\tilde{L}^{\mathrm{p}}_{ij}$ を求めよ．

(b) 固定座標系 x_i に対する $\mathbf{s}, \mathbf{m}$ の成分をそれぞれ s_i, m_i とする．$\mathbf{L}^{\mathrm{p}}$ の固定座標系に対する成分を求めよ．

(3) 巨視的塑性モデルにおける Swift の硬化式 $\sigma=k(\varepsilon_0+\varepsilon^{\mathrm{p}})^n$ について以下の問いに答えよ．

(a) 式変形すると $\sigma=\sigma_0\left(1+\dfrac{\varepsilon^{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0}\right)^n$ となる．ここで，σ_0 は初期降伏応力である．σ_0 を元の式の係数で表せ．

(b) $\sigma=\sigma_0\left(1+\dfrac{\varepsilon^{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0}\right)^n$ を塑性ひずみ ε^{p} で微分して，硬化率を求めよ．

(c) 初期硬化率を h_0 とおくと，$h=h_0\left(1+\dfrac{h_0\varepsilon^{\mathrm{p}}}{\sigma_0 n}\right)^{n-1}$ と変形できることを示せ．

(4) 結晶塑性において塑性ひずみ速度，塑性スピンは以下のように与えられる．

$$\mathbf{D}^{\mathrm{p}}=\sum_\alpha\dot{\gamma}^{(\alpha)}\mathbf{p}^{(\alpha)},\qquad \mathbf{p}^{(\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_\alpha\dot{\gamma}^{(\alpha)}\left(\mathbf{s}^{(\alpha)}\otimes\mathbf{m}^{(\alpha)}+\mathbf{m}^{(\alpha)}\otimes\mathbf{s}^{(\alpha)}\right)$$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{p}}=\sum_\alpha\dot{\gamma}^{(\alpha)}\boldsymbol{\omega}^{(\alpha)},\qquad \boldsymbol{\omega}^{(\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_\alpha\dot{\gamma}^{(\alpha)}\left(\mathbf{s}^{(\alpha)}\otimes\mathbf{m}^{(\alpha)}-\mathbf{m}^{(\alpha)}\otimes\mathbf{s}^{(\alpha)}\right)$$

(a) それぞれの式を固定座標系に関してディアディック表記せよ．

(b) 全ての成分を書き下せ．

(5) 単結晶の構成式は次式のように表せる．

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{C}^{\mathrm{e}}:\mathbf{D}-\mathbf{P},\qquad \mathbf{P}=\sum_\alpha\dot{\gamma}^{(\alpha)}\left(\mathbf{C}^{\mathrm{e}}:\mathbf{p}^{(\alpha)}+\boldsymbol{\omega}^{(\alpha)}\cdot\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}^{(\alpha)}\right)$$

(a) それぞれの式を固定座標系に関してディアディック表記せよ．

(b) 全ての成分を書き下せ．

(6) 巨視的塑性モデルにおける単軸引張を考える．$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=1\times10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$ のひずみ速

度で引張試験を実施したところ，応力ーひずみ曲線は，$\sigma = 400(0.001+\varepsilon^{\mathrm{p}})^{0.2}$ の関係であった．この時のひずみ速度を基準ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_0$ とし，応力ーひずみ関係を基準変形抵抗 $g(\varepsilon^{\mathrm{p}})$ とする．ひずみ速度感受性指数 m を用いると，応力ーひずみ関係は，$\sigma = g(\varepsilon^{\mathrm{p}})\left(\dfrac{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^m$ と表せる．$m = 0.002,\ 0.01,\ 0.1$ に対し，$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = 1\times10^{-3}, 1\times10^{-1}, 1\times10^{3}\ \mathrm{s}^{-1}$ に対する応力ーひずみ関係を求めて図示せよ．ひずみ範囲は $0 \le \varepsilon^{\mathrm{p}} \le 0.5$ とする．（おおよそ，$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = 1\times10^{-3}, 1\times10^{-1}, 1\times10^{3}\ \mathrm{s}^{-1}$ は，材料試験，プレス成形，衝突の時のひずみ速度）

(7) すべり速度は，$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{\gamma}_0\,\mathrm{sgn}(\tau^{(\alpha)})\left(\dfrac{\left|\tau^{(\alpha)}\right|}{g}\right)^{\frac{1}{m}}$ と与えられる．$m = 0.01$，$\dot{\gamma}_0 = 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$，$g = 10\ \mathrm{MPa}$ とする．今，fcc 結晶の結晶方位が $(\varphi_1, \phi, \varphi_2) = (50,\ 65,\ 64)^\circ$ であり，$\sigma_{11} = 24\ \mathrm{MPa}$ の単軸引張状態とする．Excel ファイル「単結晶」の黄色のセルを埋めて以下の問いに答えよ．

(a) 各すべり系のすべり速度を求めよ．

(b) 固定座標系に対する速度勾配の塑性成分を求めよ．

(8) 塑性ひずみ速度および塑性スピンの計算に関して以下の問いに答えよ．

(a) 各すべり系に対して，固定座標系に関する $\mathbf{p}^{(\alpha)}$ および $\boldsymbol{\omega}^{(\alpha)}$ （(5)参照）を求める．ただし，$\mathbf{p}^{(\alpha)}$ の対称性を考慮して，$p_{11}^{(\alpha)}, p_{22}^{(\alpha)}, p_{33}^{(\alpha)}, p_{12}^{(\alpha)}, p_{23}^{(\alpha)}, p_{31}^{(\alpha)}$ のみを求める．$\boldsymbol{\omega}^{(\alpha)}$ の反対称性より，$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$ として変数を減らす（奇置換は正，偶置換は負）．これらを考慮して，$\mathbf{D}^{\mathrm{p}} = \sum_\alpha \dot{\gamma}^{(\alpha)}\mathbf{p}^{(\alpha)}$ および $\mathbf{W}^{\mathrm{p}} = \sum_\alpha \dot{\gamma}^{(\alpha)}\boldsymbol{\omega}^{(\alpha)}$ を書き下して示せ．

(b) すべり速度の導出は(7)と同じとして，Excel ファイル「単結晶」の黄色のセルを埋めよ．$\mathbf{D}^{\mathrm{p}}$ および $\mathbf{W}^{\mathrm{p}}$ を求めよ．

(9) 構成則を用いると応力速度と速度勾配は，以下の式で表せる．

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{L} - \mathbf{P}, \qquad \tilde{C}_{ijkl} = C^{\mathrm{e}}_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{lj} - \delta_{il}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk}\right)$$

(a) 上式を導出せよ．

(b) 全ての成分を書き下して示せ．

(10) x_2 方向の単軸引張を想定する．応力速度は，$\dot{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{33} = \dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{23} = \dot{\sigma}_{31} = 0$ と規定できる．引張速度を $L_{22} = D_{22} = a$ と指定する．回転に関して，$L_{12} = L_{32} = L_{31} = 0$ と規定する．以下の問いに答えよ．

(a) この条件において，$L_{12} = L_{32} = L_{31} = 0$ によって 3 種類のせん断変形が拘束されている（発生できない）．どのような変形が発生できないか図示せよ．

(b) $L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{21}, L_{23}, L_{13}$ は未知である．つまり，発生することが許容される．これらの速度勾配はそれぞれどのような変形に対応するか図示せよ．

(c) 未知の速度勾配を求めるための連立方程式を求めよ．

10.3 多結晶塑性

(1) 単結晶の構成式は 10.2 節で示した．多結晶体を対象とする場合は，個々の結晶粒の相互作用および結晶粒内の変形を解けばよい．物理的には，結晶粒界において，(i) 変位が連続である，(ii) 力のつり合いを満たすことが必要である．また，厳密には，(iii) 結晶粒内において変形は不均一である．多結晶体の変形の解析方法として，Taylor モデル，Sachs モデル，Self-consistent モデル，有限要素法を使った方法などがある．様々な方法があるので，それらを調査し，上記(i)~(iii)の観点において差異を比較せよ．