

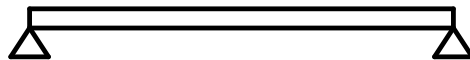
機械工学演習Ⅲ（機械力学第3回）

有限要素法による振動解析

- ◇有限要素法の考え方、形状関数
- ◇各要素の質量・剛性マトリックス
- ◇系全体のマトリックス、境界条件
- ◇計算例
- ◇課題

解析解と有限要素法

・解析的な手法で解けるのは、断面が一樣なものだけ



・現実には、複雑な形状の機械要素が多くある

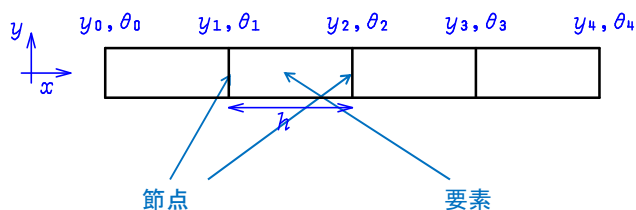


⇒有限要素法により、数值的に解析

◇有限要素法の考え方

- ・全体を細かい要素に分割し、節点での状態量(はりの場合は変位と変位角)で、系を記述する。

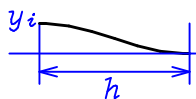
$$y(x) \Rightarrow y_0, \theta_0, \dots, y_N, \theta_N$$



- ・要素内の変位 $y(x)$ は、要素の両側の節点の状態量から内挿して考える。

形状関数

- ・各節点でひとつの量だけが1でそれ以外が0となる関数を考える。



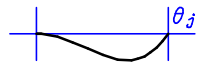
$$N_1(x) = 1 - 3(x/h)^2 + 2(x/h)^3$$



$$N_3(x) = 3(x/h)^2 - 2(x/h)^3$$

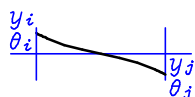


$$N_2(x) = (x/h) - 2(x/h)^2 + (x/h)^3$$



$$N_4(x) = -(x/h)^2 + (x/h)^3$$

- ・4つの形状関数を重ね合わせることで、区間内の任意の変位を表す。



$$y(x) = y_i N_1(x) + \theta_i N_2(x) + y_j N_3(x) + \theta_j N_4(x)$$

◇各要素の質量・剛性マトリックス

・要素の運動エネルギーから、質量マトリックスを導出する

各節点の状態量と形状関数で表現

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^h \rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^h \rho A (\dot{y}_i N_1 + \dot{\theta}_i N_2 + \dot{y}_j N_3 + \dot{\theta}_j N_4)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^h \rho A \begin{Bmatrix} \dot{y}_i & \dot{\theta}_i & \dot{y}_j & \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3^2 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{y}_j \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} dx$$

機械工学演習Ⅲ 第15回

5

各要素の質量マトリックス

・積分を、行列の中に入れると

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{y}_i & \dot{\theta}_i & \dot{y}_j & \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^h \rho A N_1^2 dx & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{y}_j \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{y}_i & \dot{\theta}_i & \dot{y}_j & \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} [m]_e \begin{Bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{y}_j \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix}$$

※質量マトリックスと運動エネルギー: $T = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x}$

・要素内で ρA が一定とすると

$$[m]_e = \frac{\rho A h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}$$

機械工学演習Ⅲ 第15回

6

各要素の剛性マトリックスの導出

・要素のポテンシャルエネルギーから、剛性マトリックスを導出する

各節点の状態量と形状関数で表現

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2} \int_0^h EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^h EJ \left(y_i \frac{d^2 N_1}{dx^2} + \theta_i \frac{d^2 N_2}{dx^2} + y_j \frac{d^2 N_3}{dx^2} + \theta_j \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^h EJ \{ y_i \quad \theta_i \quad y_j \quad \theta_j \} \begin{bmatrix} \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} \right)^2 & \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \dots \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \left(\frac{d^2 N_2}{dx^2} \right)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} dx
 \end{aligned}$$

機械工学演習Ⅲ 第15回

7

各要素の剛性マトリックス

・積分を、行列の中に入れると

$$U_e = \frac{1}{2} \{ y_i \quad \theta_i \quad y_j \quad \theta_j \} \begin{bmatrix} \int_0^h EJ \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} \right)^2 dx & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{ y_i \quad \theta_i \quad y_j \quad \theta_j \} [k]_e \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

※剛性マトリックスとポテンシャルエネルギー: $U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$

・要素内で EJ が一定とすると

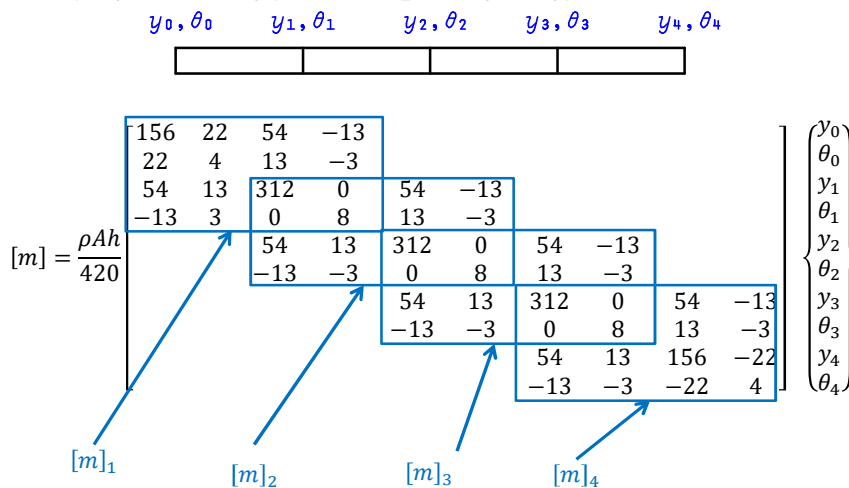
$$[k]_e = \frac{EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

機械工学演習Ⅲ 第15回

8

◇系全体の行列、境界条件

・系全体の行列は、各要素の行列を足し合わせて得られる

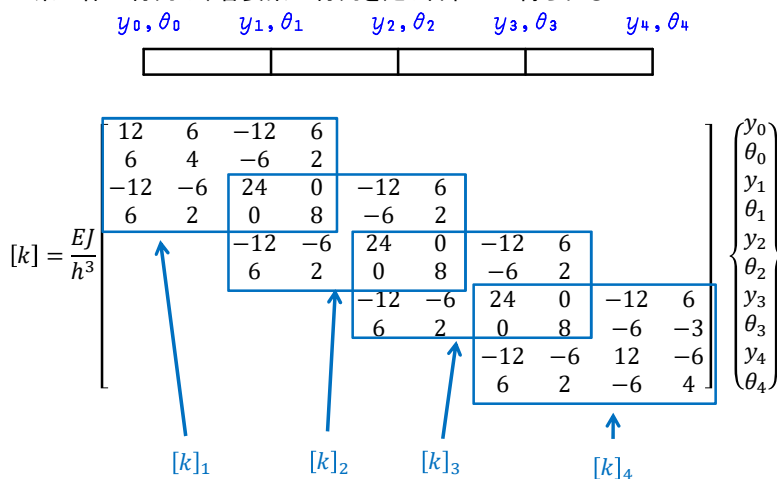


機械工学演習Ⅲ 第15回

9

系全体の剛性行列

・系全体の行列は、各要素の行列を足し合わせて得られる



機械工学演習Ⅲ 第15回

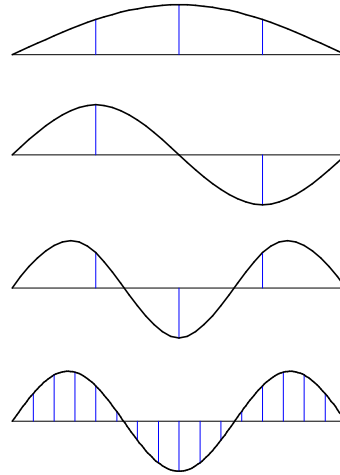
10

◇計算例(両端単純支持)

長さ:500mm、幅:20mm、厚さ:5mm
 $E=2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, $\rho=7.9 \times 10^3 \text{kg/m}^3$

4分割の場合
 固有振動数 (解析解)
 $\omega_1=46.3\text{Hz}$ (46.3Hz)
 $\omega_2=186.0\text{Hz}$ (185.2Hz)
 $\omega_3=424.4\text{Hz}$ (416.8Hz)

16分割の場合
 $\omega_1=46.3\text{Hz}$ (46.3Hz)
 $\omega_2=185.2\text{Hz}$ (185.2Hz)
 $\omega_3=416.8\text{Hz}$ (416.8Hz)



機械工学演習Ⅲ 第15回

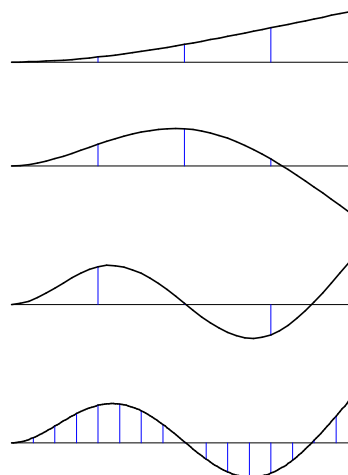
13

◇計算例(片持ち)

長さ:500mm、幅:20mm、厚さ:5mm
 $E=2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, $\rho=7.9 \times 10^3 \text{kg/m}^3$

4分割の場合
 固有振動数 (解析解)
 $\omega_1=16.5\text{Hz}$ (16.5Hz)
 $\omega_2=103.5\text{Hz}$ (103.4Hz)
 $\omega_3=291.7\text{Hz}$ (289.5Hz)

16分割の場合
 $\omega_1=16.5\text{Hz}$ (16.5Hz)
 $\omega_2=103.4\text{Hz}$ (103.4Hz)
 $\omega_3=289.5\text{Hz}$ (289.5Hz)



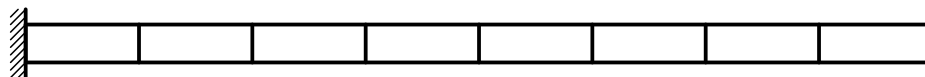
機械工学演習Ⅲ 第15回

14

機械工学演習Ⅲ(機械力学第3回) 有限要素法による片持ちはりの振動解析

目的

有限要素法のプログラムを用いて図のような片持ちはりの固有振動数・振動モードを解析する。また、一部の厚さを変更した場合の固有振動数の変化を考察する。

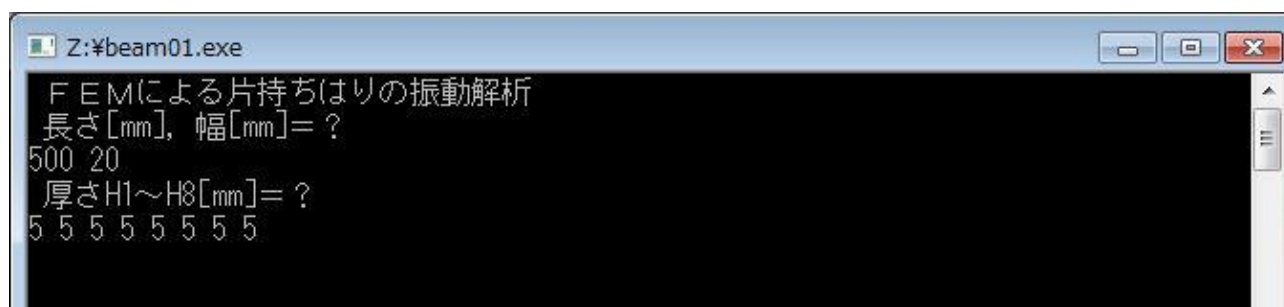


プログラム利用方法

まずホームページからダウンロードした beam01.zip から beam01.exe を取り出して適当なフォルダに置く。

beam01.exe をダブルクリックして実行し、はりの寸法を入力する。最初にはりの長さで断面の幅を [mm] で入力する。次に、はりの厚さを [mm] で入力する。このプログラムでははりを 8 分割して計算するので、各要素の厚さを 8 個入力する。一様なはりの場合は、すべて同じ値を入力することになる。

なお、はりの材質は鉄で、 $E = 2.06 \times 10^{11}$ [Pa], $\rho = 7.90 \times 10^3$ [Kg/m³] で計算している。

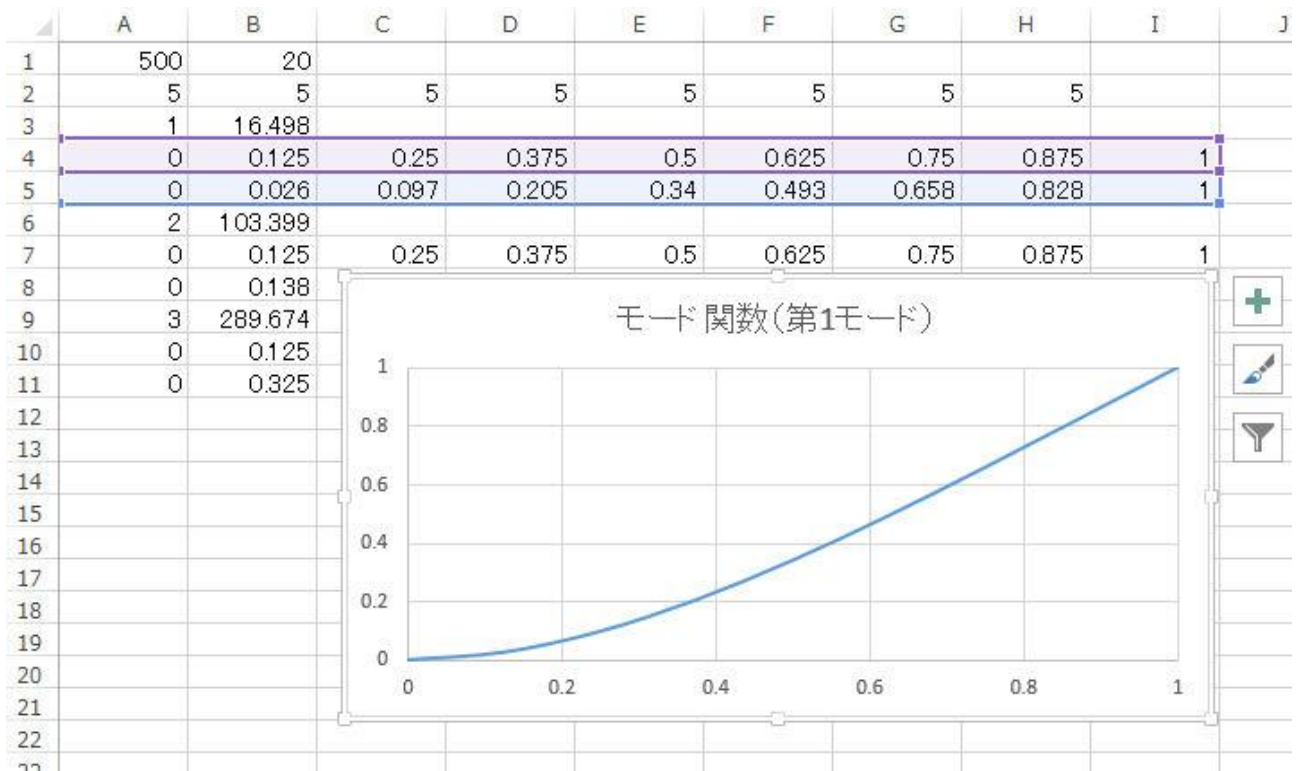


プログラムが実行されると、BEAM01.CSV というファイルが生成される。このファイルはエクセルで開くことができる。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	500	20								
2	5	5	5	5	5	5	5	5		
3	1	16.498								
4	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1	
5	0	0.026	0.097	0.205	0.34	0.493	0.658	0.828	1	
6	2	103.399								
7	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1	
8	0	0.138	0.417	0.654	0.714	0.534	0.135	-0.407	-1	
9	3	289.674								
10	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1	
11	0	0.325	0.725	0.618	0.02	-0.558	-0.581	0.05	1	
12										
13										

- ・セル A1,B1 はコンソールから入力したはりの長さで幅である。
- ・セル A2~H2 はコンソールから入力したはりの各要素の厚さである。
- ・セル A3 はモードの番号、第 1 モードなので 1 となる。B3 は第 1 モードの固有振動数 [Hz] である。
- ・セル A4~I4 は、はりの分割点の座標である。モード関数を描画する際に使用する。
- ・セル A5~I5 は、各分割点でのモード関数の値である。
- ・6 行以下は、第 2 モードおよび第 3 モードのデータである。詳しい説明は省略。

・セル A4~I5 のデータを用いてモード関数のグラフを作成することができる（グラフの体裁は各自整えること）。



課題

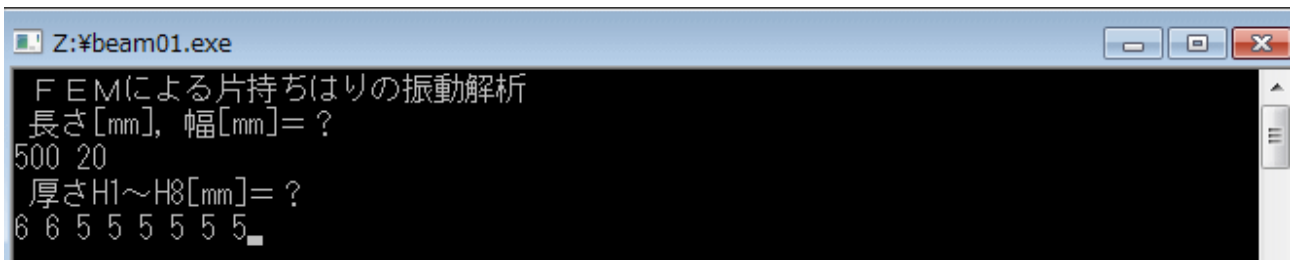
1. プログラムを用いて、与えられた寸法の一様なはりの第1モードの固有振動数およびモード関数を求める。

また、解析解

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{(\beta_1 L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(1.875)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E(BH^3/12)}{\rho A}}$$

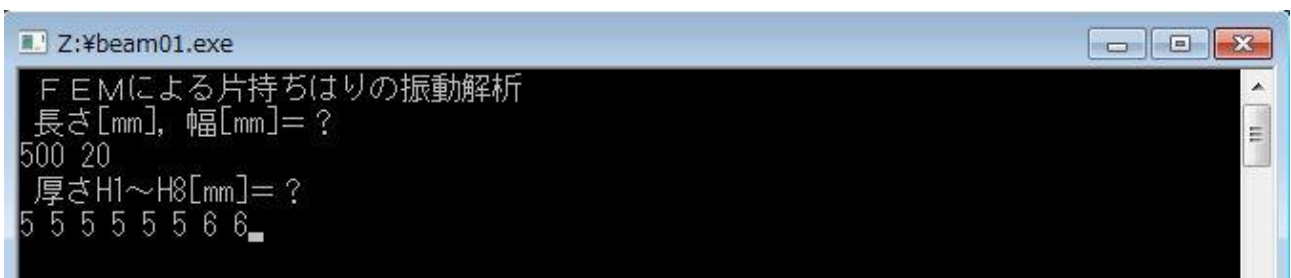
から得られる値と比較する。

2. 固定端側の厚さ H_1, H_2 を5~9[mm]と変えていった場合の第1モードの固有振動数の変化を調べ、グラフにする。そして、なぜこのような結果になったかを考察すること。



```
Z:\¥beam01.exe
FEMによる片持ちはりの振動解析
長さ[mm], 幅[mm]=?
500 20
厚さH1~H8[mm]=?
6 6 5 5 5 5 5 5
```

3. 自由端側の厚さ H_7, H_8 を5~9[mm]と変えていった場合の第1モードの固有振動数の変化を調べ、グラフにする。そして、なぜこのような結果になったかを考察すること。



```
Z:\¥beam01.exe
FEMによる片持ちはりの振動解析
長さ[mm], 幅[mm]=?
500 20
厚さH1~H8[mm]=?
5 5 5 5 5 5 6 6
```

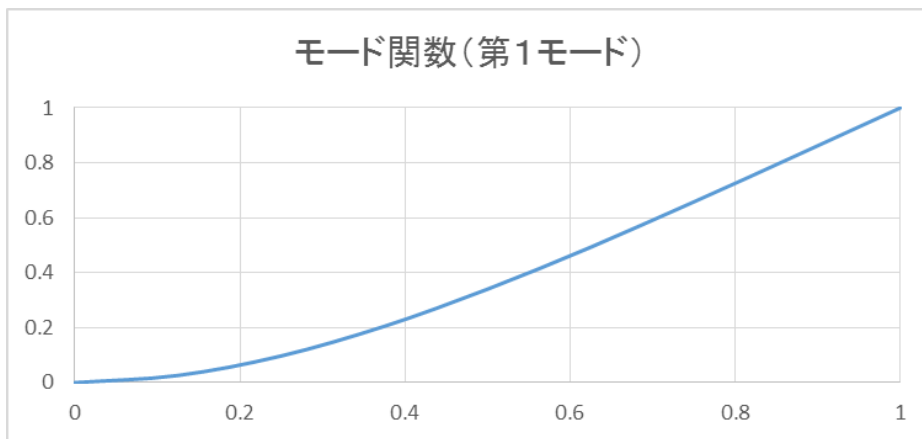
これらの結果を見本にならってレポートにまとめ、提出すること。

学籍番号：5071-0xxx

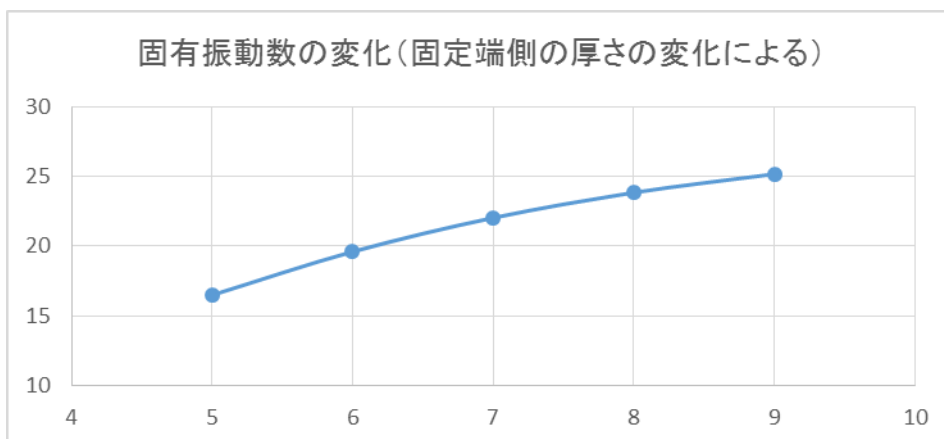
氏名：静岡 太郎

見本

1. 一様な片持ちはりの第1モードの固有振動数およびモード関数

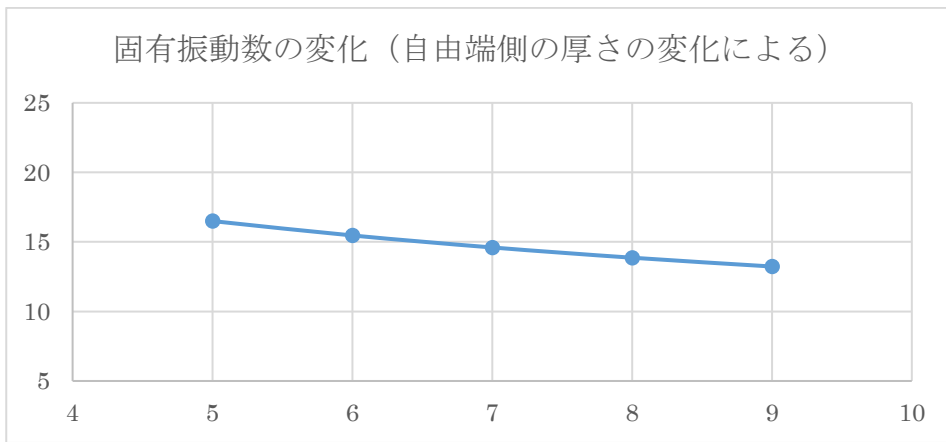
ヤング率 $E = 2.06 \times 10^{11} [\text{Pa}]$ 密度 $\rho = 7.90 \times 10^3 [\text{Kg/m}^3]$ 長さ $L = 500 [\text{mm}]$ 幅 $B = 20 [\text{mm}]$ 厚さ $H = 5 [\text{mm}]$ 固有振動数 $f_1 = 16.5 [\text{Hz}]$ 固有振動数 (解析解) $f_1 = 16.5 [\text{Hz}]$ 

2. 固定端側の厚さを変えた場合の固有振動数の変化



考察：・・・・・・・・

3. 自由端側の厚さを変えた場合の固有振動数の変化



考察：・・・・・・・・