クエット・ポアズイユ流れ（二次元）

クエット流れ（テキスト p4，平行な平板間を流体で満たし，片方だけを速度 U で平行に動かした流れ，速度分布が直線的になる.）とポアズイユ流れ（テキスト p91-92，圧力勾配によって誘起された流れ，放物線の速度分布を持つ．十分発達した流れ）を組み合わせた流れを考える.

仮定:　定常（$\dfrac{\partial}{\partial t}=0$），$v, w=0$, 十分発達した流れ（$x$ 方向に変化無し，$\dfrac{\partial}{\partial x}=0$）

境界条件：$y=0$　で　$u=0$,　　$y=h$　で　$u=U$,

x 方向のナビエストークス方程式（p134）は

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

ここで

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$：定常　　$u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$：発達した流れ（ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ ）

$v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，　$w\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$　：　$v, w=0$

$F_x=0$：外力無し　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$：二次元　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$：発達した流れ

従って，運動方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

となる．ここでは p は x のみの関数で流れが十分に発達していることから

$$\frac{\partial p}{\partial x}=const.$$

また，u は y のみの関数であるから常微分方程式に書き換えられる.

$$\frac{dp}{dx}=\mu\left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)$$

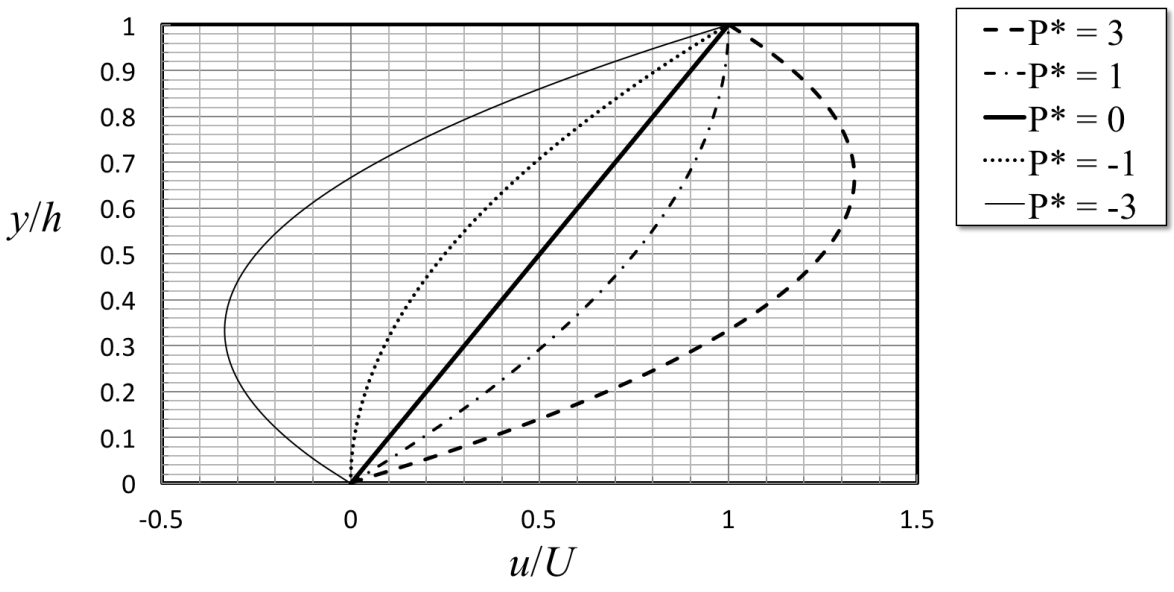
上式を $\boldsymbol{y}$ について 2 階積分すれば,

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)y^2 + C_1 y + C_2$$

境界条件を用いて，未定係数を定めれば

$$u = U\frac{y}{h} + \frac{h^2}{2\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{y}{h}(1-\frac{y}{h})\right)$$

となる.

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} + \frac{h^2}{2U\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{y}{h}(1-\frac{y}{h})\right), \quad p* = \frac{h^2}{2U\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

を可視化した図