

コーチーの運動方程式 (Cauchy's equation of motion) の導出 (x 方向のみから)

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho F - \nabla p + \nabla \cdot \tau = 0$$

ここで

$$V = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

- ① 検査体積における x 方向の単位時間当たりの運動量変化

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x dx dy dz)$$

- ② 検査体積に出入りする単位時間当たりの x 方向の運動量

x 軸に垂直な面 (単位面積 $dy dz$) からの v_x による出入り

$$\left[\rho v_x v_x - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) \frac{dx}{2} \right] dy dz - \left[\rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

y 軸に垂直な面 (単位面積 $dxdz$) からの v_y による出入り

$$\left[\rho v_x v_y - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) \frac{dy}{2} \right] dxdz - \left[\rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) \frac{dy}{2} \right] dxdz$$

z 軸に垂直な面 (単位面積 $dxdy$) からの v_z による出入り

$$\left[\rho v_x v_z - \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) \frac{dz}{2} \right] dxdy - \left[\rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) \frac{dz}{2} \right] dxdy$$

結果として

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) \right] dxdydz$$

- ③ x 方向の外力 (体積力)

$$\rho F_x dxdydz$$

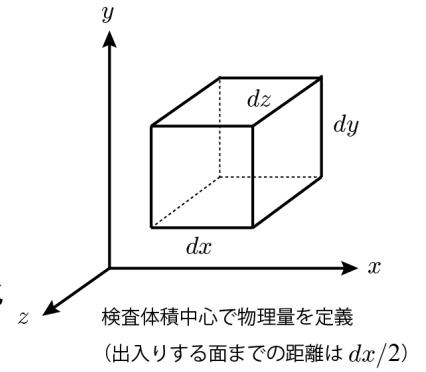
- ④ x 方向の内力 (応力)

x 軸に垂直な面

$$-\left[(-p + \tau_{xx}) - \frac{\partial}{\partial x} (-p + \tau_{xx}) \frac{dx}{2} \right] dy dz + \left[(-p + \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x} (-p + \tau_{xx}) \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

y 軸に垂直な面

$$-\left[\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dxdz + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dxdz$$



z 軸に垂直な面

$$-\left[\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right] dx dy + \left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right] dx dy$$

結果として

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] dx dy dz$$

これらをまとめて(①=②+③+④), $dxdydz$ で割ると

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z)\right] = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

y 方向, z 方向も同様に考えるとテキストの式 (8.22) を得る.

ここで非圧縮性流体を考えれば ρ は一定のため以下のようになり

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) = \rho \left[v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]$$

さらに、連続の式より

$$v_x \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = 0$$

のため以下の式を得る.

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right]$$

