勾配・発散・回転

▽（ナブラ）の定義

$$\nabla = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

勾配（grad，グラーディエント）スカラー量に作用して，ベクトル量を与える

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= \left(\vec{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

発散（div，ダイバージェンス）ベクトル量に作用して，スカラー量を与える

$$\mathrm{div}V = \nabla \cdot V = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z\right)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

回転（rot，ローテーション）ベクトル量に作用して，ベクトル量を与える

$$\mathrm{rot}V = \nabla \times V = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

＊勾配も発散も，それぞれ，スカラー，ベクトルだけでなく，テンソル量一般に作用させることができる．勾配の演算はテンソルの階数を 1 階上げ，発散の演算はテンソルの階数を１つ下げる微分演算である．

テンソル　Tensor
（広辞苑より）
二つのベクトル量があり、一方のベクトル成分の一次形式として他方のベクトル成分が表される場合、その結びつきを総合的に示す量。固体内部の応力やひずみはテンソルとして表現される。

スカラー　（０）　量
ベクトル　（１）　量、方向
テンソル　（２）　量、方向、面
・・・　（３・・・）

任意の２階のテンソルＴは、対称テンソルＳ（対称部分）と交代テンソルＡ（反対称）の和に分解できる。

$$T=S+A$$
$$S=1/2(T+T^t)$$
$$A=1/2(T-T^t)$$

速度勾配テンソル（velocity gradient tensor）

変形速度テンソル（rate of deformation tensor）
$\dot{\gamma}$　歪み速度テンソル（rate of strain tensor）
strain rate tensor
＊対称テンソル:座標変換によって対角化できる（主軸）

回転速度テンソル（rate of rotation tensor）
ω　スピンテンソル（spin tensor）
vorticity tensor

構成方程式
変形と流れの力学（松信八十男）

連続体力学では質量、運動量、角運動量およびエネルギーの各保存則が成立するものとし、それらの法則を表した関係式を基礎方程式とする。物質の連続性を仮定しているので、基礎方程式は一般には偏微分方程式の形に書くことができる。

この偏微分方程式が解けるためには、少なくともそこに含まれる未知数の数と方程式の数が一致しなければならない。通常はこれらの保存則を表す方程式に物質の特性を表す方程式を加えてはじめて両者の数が一致する。この物質の特性を表す方程式は特性方程式と呼ばれ、連続体力学では重要な意味を持つ。

物質の微小部分に注目し、それが外界からある“刺激”を受けたとする。微小部分がそれに対してどのように応答するかを式の形で表したものをその物質の構成方程式とよぶ。

フック、ダルシー、フィック、フーリエ、オーム。。。