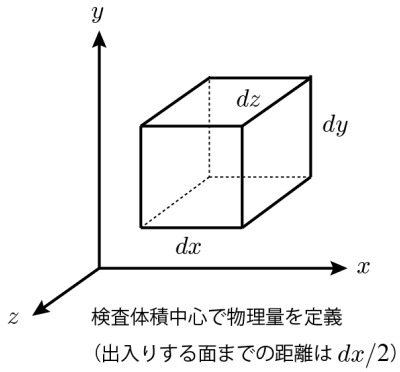
コーシーの運動方程式（Cauchy's equation of motion）の導出（x 方向のみから）

$$\rho\frac{DV}{Dt} = \rho F - \nabla p + \nabla\cdot\tau = 0$$



ここで

$$V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_x} \\ \boldsymbol{v_y} \\ \boldsymbol{v_z} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F_x} \\ \boldsymbol{F_y} \\ \boldsymbol{F_z} \end{bmatrix}$$

① 検査体積における x 方向の単位時間当たりの運動量変化

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x dxdydz)$$

② 検査体積に出入りする単位時間当たりの x 方向の運動量

x 軸に垂直な面（単位面積 $dydz$）からの v_x による出入り

$$\left[\rho v_x v_x - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x)\frac{dx}{2}\right]dydz - \left[\rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x)\frac{dx}{2}\right]dydz$$

y 軸に垂直な面（単位面積 $dxdz$）からの v_y による出入り

$$\left[\rho v_x v_y - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y)\frac{dy}{2}\right]dxdz - \left[\rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y)\frac{dy}{2}\right]dxdz$$

z 軸に垂直な面（単位面積 $dxdy$）からの v_z による出入り

$$\left[\rho v_x v_z - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z)\frac{dz}{2}\right]dxdy - \left[\rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z)\frac{dz}{2}\right]dxdy$$

結果として

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z)\right]dxdydz$$

③ x 方向の外力（体積力）

$$\rho F_x dxdydz$$

④ x 方向の内力（応力）

x 軸に垂直な面

$$-\left[(-p+\tau_{xx}) - \frac{\partial}{\partial x}(-p+\tau_{xx})\frac{dx}{2}\right]dydz + \left[(-p+\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x}(-p+\tau_{xx})\frac{dx}{2}\right]dydz$$

y 軸に垂直な面

$$-\left[\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dxdz + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dxdz$$

z 軸に垂直な面

$$-\left[\tau_{zx}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dxdy+\left[\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dxdy$$

結果として

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right]dxdydz$$

これらをまとめて(①=②+③+④)，$dxdydz$ で割ると

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial t}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z)\right]=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

y 方向，z 方向も同様に考えるとテキストの式（8.22）を得る．

ここで非圧縮性流体を考えれば ρ は一定のため以下のようになり

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial t}=\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y)=\rho\left[v_x\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]$$

さらに，連続の式より

$$v_x\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]=0$$

のため以下の式を得る．

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\left[\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right]$$