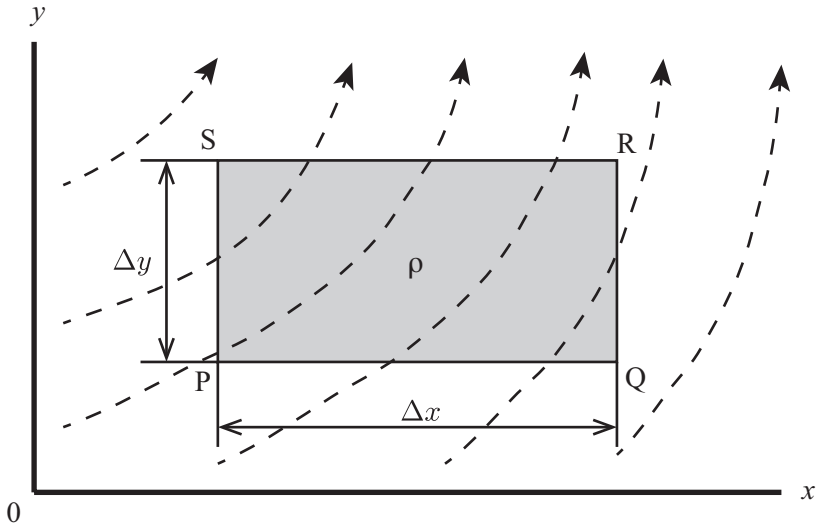
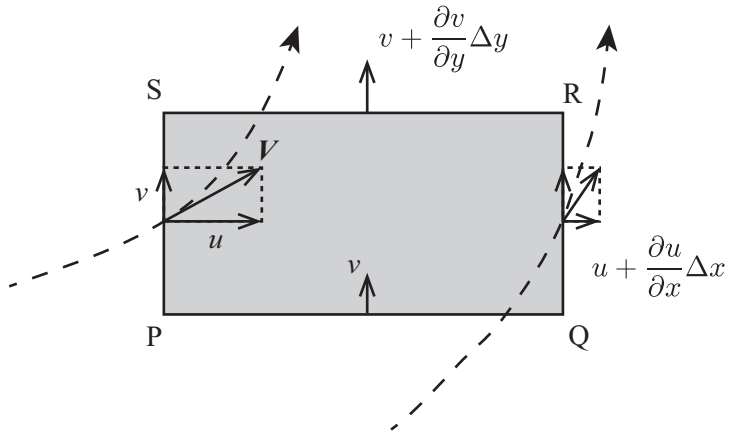
連続の式





連続の式は質量の保存則から導かれるものである．非圧縮性流体の密度は変化しないので，質量の保存則と体積流量の保存則は同じ意味になる．従って，この二つをいずれも連続の式という場合が多い．

二次元の流れ場について説明する．図に破線で示されるような流線をもつ流れ場に，座標軸 x と y に平行に，辺の長さがそれぞれ Δx と Δy である直方体の微小検査体積 PQRS をとる（紙面奥行き方向に単位長さ１）．流体の密度を ρ とすると，この検査体積内に含まれる質量は$\rho\Delta x\Delta y$である．

検査体積に流入する質量には，面 SP から流入するものを例に取れば速度 V のうち x 方向成分 u が関係し，y 方向成分 v には関係しない．他の面についても同様に考えれば，Δt 時間に流入する質量は，図の場合，面 PQ と面 SP からであり，それぞれ次のようになる．

面 PQ から：$(\rho v)\Delta t\Delta x$　　面 SP から：$(\rho u)\Delta t\Delta y$

ここで v は面 PQ 上で必ずしも一定ではないが，Δx が小さいので PQ 上の y 方向速度は近似的に v で表すことができる．他の面も同様である．

一方，Δt 時間に流出する質量は，面 RS と面 QR からであり，次のように表される．

面 RS から：$(\rho v + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y)\Delta t\Delta x$　　面 QR から：$(\rho u + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x)\Delta t\Delta y$

ここでかっこの中の第 2 項はそれぞれ ρv と ρu の変化分である（テーラー展開で高次の微小量を無視）．この場合，前述したことと同様の理由で，例えば面 RS 上の y 方向速度の x 方向変化 $\partial v/\partial x$ は微小として，v の y 方向変化$\partial v/\partial y$ のみを考慮している．
したがって Δt 時間に流入する質量と流出する質量の差は，

$$\rho v\Delta t\Delta x + \rho u\Delta t\Delta y - \left(\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t\Delta x + \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t\Delta y)\right) = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta t\Delta x\Delta y - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta t\Delta x\Delta y$$

この差は Δt 時間に検査体積に貯えられる質量 $\Delta t\,(\rho\Delta x\Delta y)$に等しいから次の関係が成り立つ．

$$\Delta(\rho\Delta x\Delta y) = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta t\Delta x\Delta y - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta t\Delta x\Delta y$$

両辺を $\Delta t\,(\rho\Delta x\Delta y)$で除し，$\Delta t$ をゼロに近づけると，次の連続の式を得る．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

密度が一定（非圧縮性流体）の場合は，流れが定常か非定常かにかかわらず，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

以上は二次元の流れ場についてのものであるが，三次元の流れ場では，z 方向の速度成分を w とすれば，前述のそれぞれに対応した以下の 2 式を得る．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

１．ある物体表面付近の流速 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ が次式で与えられている．ただし，U は主流の流速，δ は境界層厚さである．

境界層内（$0 \le y \le \delta$）　$\boldsymbol{u} = \dfrac{3U}{2}\left(\dfrac{y}{\delta}\right) - \dfrac{U}{2}\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^3$ ，$\boldsymbol{v} = 0$

主流（$y \ge \delta$）　$\boldsymbol{u} = U$ ，$\boldsymbol{v} = 0$

① 主流でのせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}_{xy}$ を求めよ．

② 境界層でのせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}_{xy}$ を求めよ．

③ 主流での粘性によるせん断応力 $\tau(y)$を求めよ．

④ 境界層でのせん断応力 $\tau(y)$を求めよ．

⑤ δ = 10 mm，U = 1.5 m/s のとき，壁面せん断応力 τ を求めよ．なお粘度 μ= 18×10^{-6} Pa・s とする．

P21　練習問題　[2.5]

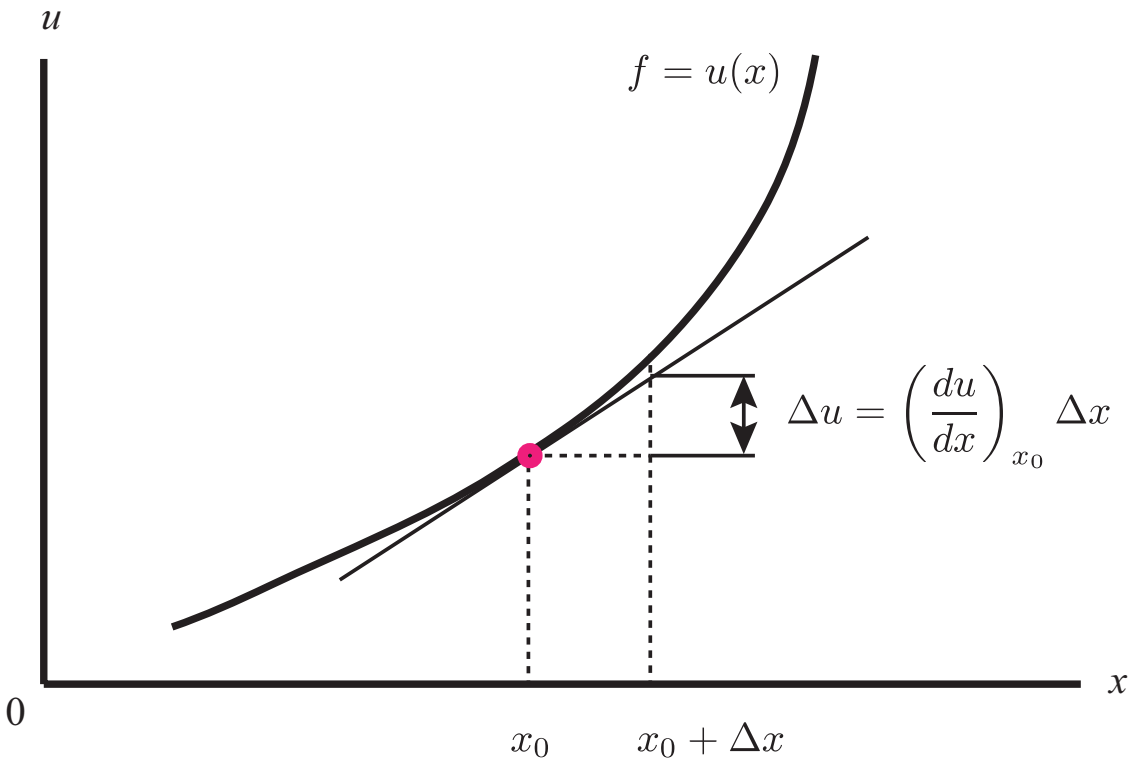
A two-dimensional velocity field is given by

$$u = -\frac{Ay}{x^2 + y^2}, v = -\frac{Ax}{x^2 + y^2}$$

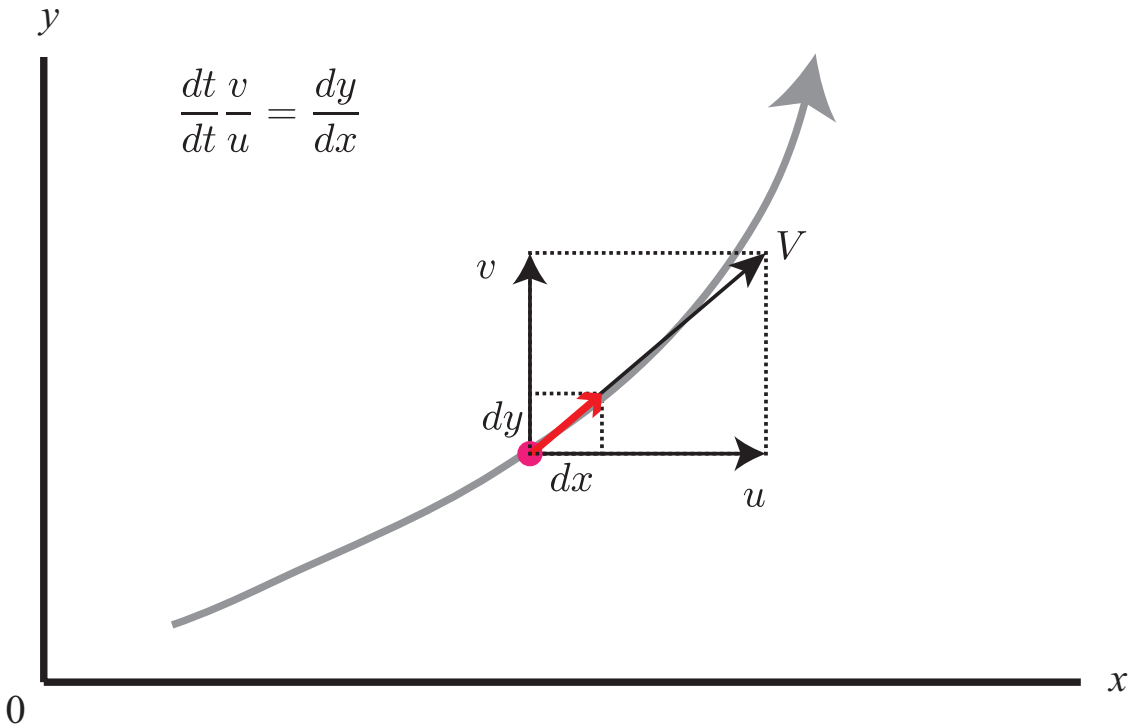
where A is a constant.

What is this flow called?
Develop expressions for (1) acceleration and (2) the vorticity.

テーラー展開


u
$f = u(x)$
$\Delta u = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x_0} \Delta x$
x
0
x_0
$x_0 + \Delta x$

流線


y
$\frac{dt}{dt}\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}$
v
V
dy
dx
u
x
0

勾配・発散・回転

▽（ナブラ）の定義

$$\nabla = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

勾配（grad，グラーディエント）スカラー量に作用して，ベクトル量を与える

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= \left(\vec{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

発散（div，ダイバージェンス）ベクトル量に作用して，スカラー量を与える

$$\mathrm{div}V = \nabla \cdot V = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z\right)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

回転（rot，ローテーション）ベクトル量に作用して，ベクトル量を与える

$$\mathrm{rot}V = \nabla \times V = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

＊勾配も発散も，それぞれ，スカラー，ベクトルだけでなく，テンソル量一般に作用させることができる．勾配の演算はテンソルの階数を 1 階上げ，発散の演算はテンソルの階数を１つ下げる微分演算である．

テンソル　Tensor
（広辞苑より）
二つのベクトル量があり、一方のベクトル成分の一次形式として他方のベクトル成分が表される場合、その結びつきを総合的に示す量。固体内部の応力やひずみはテンソルとして表現される。

スカラー　（０）　量
ベクトル　（１）　量、方向
テンソル　（２）　量、方向、面
・・・　（３・・・）

任意の２階のテンソルＴは、対称テンソルＳ（対称部分）と交代テンソルＡ（反対称）の和に分解できる。

$$T=S+A$$
$$S=1/2(T+T^t)$$
$$A=1/2(T-T^t)$$

速度勾配テンソル（velocity gradient tensor）

変形速度テンソル（rate of deformation tensor）
$\dot{\gamma}$　歪み速度テンソル（rate of strain tensor）
strain rate tensor
＊対称テンソル:座標変換によって対角化できる（主軸）

回転速度テンソル（rate of rotation tensor）
ω　スピンテンソル（spin tensor）
vorticity tensor

構成方程式
変形と流れの力学（松信八十男）

連続体力学では質量、運動量、角運動量およびエネルギーの各保存則が成立するものとし、それらの法則を表した関係式を基礎方程式とする。物質の連続性を仮定しているので、基礎方程式は一般には偏微分方程式の形に書くことができる。

この偏微分方程式が解けるためには、少なくともそこに含まれる未知数の数と方程式の数が一致しなければならない。通常はこれらの保存則を表す方程式に物質の特性を表す方程式を加えてはじめて両者の数が一致する。この物質の特性を表す方程式は特性方程式と呼ばれ、連続体力学では重要な意味を持つ。

物質の微小部分に注目し、それが外界からある“刺激”を受けたとする。微小部分がそれに対してどのように応答するかを式の形で表したものをその物質の構成方程式とよぶ。

フック、ダルシー、フィック、フーリエ、オーム。。。