流線の局率と圧力勾配　（今井功　流体力学　前編　p66）

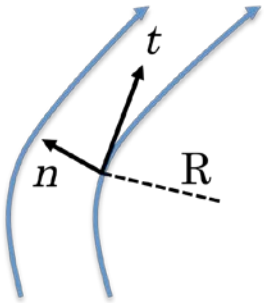
Bernoulli の定理は、本来、1 本の流線上で流速変化に応じて圧力がどう変化するかを述べるものであって、異なる流線上にある 2 点の圧力の関係については関知しないことを注意しなければならない。

今、一般に圧縮性の流体の定常流を考えよう。ただし簡単のために、外力は働かないものと仮定する。この場合、運動方程式は

$$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p$$

と書ける。今、1 つの流線を考える。流線に沿って測った長さを s、接線方向の単位ベクトル　−すなわち、接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$、流速の大きさを q とすると、

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad} = q\frac{\partial}{\partial s} \quad , \quad \boldsymbol{v} = q\boldsymbol{t}$$



である。したがって

$$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = q\frac{\partial}{\partial s}(q\boldsymbol{t}) = q\frac{\partial q}{\partial s}\boldsymbol{t} + q^2\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s}$$

ところが、微分幾何学で知られているように、

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s} = \frac{1}{R}\boldsymbol{n} \quad , \quad \kappa = \frac{1}{R}$$

という関係がある。ただし、$\boldsymbol{n}$ は流線の法線ベクトル、κは曲率、R は曲率半径である。従って運動方程式は

$$\mathrm{grad}p = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial q^2}{\partial s}\boldsymbol{t} - \kappa\rho q^2\boldsymbol{n}$$

となる。すなわち、圧力は $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{n}$ のつくる平面内で変化し、その勾配は

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial q^2}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial s} = -\kappa\rho q^2$$

で与えられる。バロトロピー流体では（密度が圧力だけの関数で表される流れ）、上式の第一式は、

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\int\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}q^2\right) = 0$$

と書きかえられるから、s について積分して Bernoulli の定理が得られる。第二

式は法線方向の圧力勾配を与える。すなわち流線が曲がっている場合には、曲率中心に向かって圧力が低下し、その勾配は流速の 2 乗と流線の曲率の積に等しい。この事実は**流線曲率の定理**として記憶するのが便利であろう。直感的いえば、流体粒子が曲線運動をするのに必要な求心力は圧力勾配によってまかなわれるというのである。