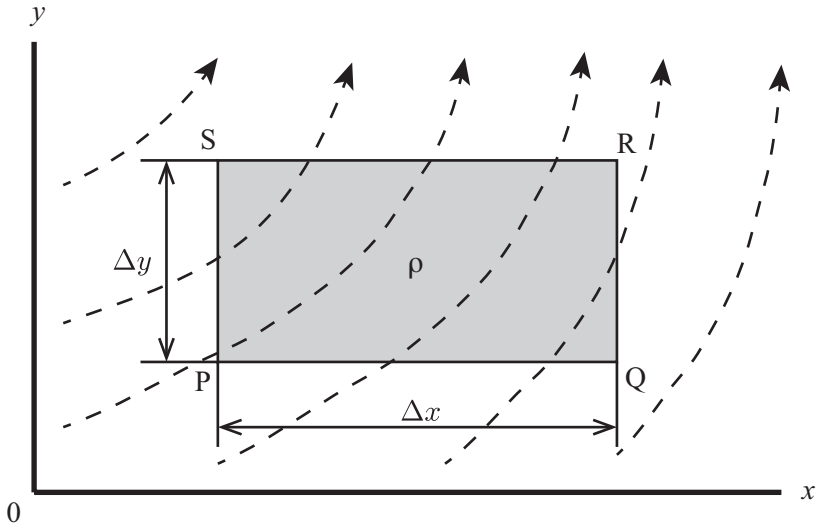
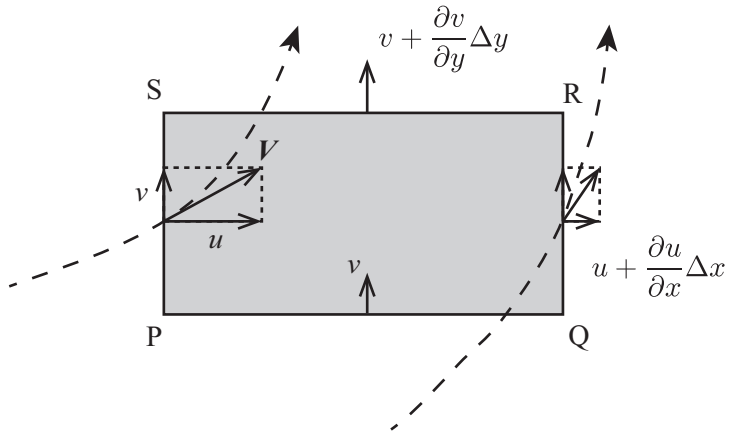
連続の式　（参考文献：深野，流体工学Ｉ）





連続の式は質量の保存則から導かれるものである．非圧縮性流体の密度は変化しないので，質量の保存則と体積流量の保存則は同じ意味になる．従って，この二つをいずれも連続の式という場合が多い．

二次元の流れ場について説明する．図に破線で示されるような流線をもつ流れ場に，座標軸 x と y に平行に，辺の長さがそれぞれΔx とΔy である直方体の微小検査体積 PQRS をとる（紙面奥行き方向に単位長さ１）．流体の密度をρとすると，この検査体積内に含まれる質量はρ$\Delta x\,\Delta y$ である．

検査体積に流入する質量には，面 SP から流入するものを例に取れば速度 $\boldsymbol{V}$ のうち x 方向成分 u が関係し，y 方向成分 v には関係しない．他の面についても同様に考えれば，Δt 時間に流入する質量は，図の場合，面 PQ と面 SP からであり，それぞれ次のようになる．

面 PQ から：$(\rho v)\Delta t\Delta x$　　面 SP から：$(\rho u)\Delta t\Delta y$

ここで v は面 PQ 上で必ずしも一定ではないが, Δx が小さいので PQ 上の y 方向速度は近似的に v で表すことができる．他の面も同様である．

一方，Δt 時間に流出する質量は，面 RS と面 QR からであり，次のように表される．

面 RS から：$(\rho v + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y)\Delta t\Delta x$　　面 QR から：$(\rho u + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x)\Delta t\Delta y$

ここでかっこの中の第 2 項はそれぞれρv とρu の変化分である（テーラー展開で高次の微小量を無視）. この場合, 前述したことと同様の理由で, 例えば面 RS 上の y 方向速度の x 方向変化$\partial v/\partial x$ は微小として，v の y 方向変化$\partial v/\partial y$ のみを考慮している．
したがってΔt 時間に流入する質量と流出する質量の差は,

$$\rho v\Delta t\Delta x + \rho u\Delta t\Delta y - \left(\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t\Delta x + \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t\Delta y)\right) = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta t\Delta x\Delta y - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta t\Delta x\Delta y$$

この差はΔt 時間に検査体積に貯えられる質量Δt ($\rho\Delta x$ Δy)に等しいから次の関係が成り立つ．

$$\Delta(\rho\Delta x\Delta y) = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta t\Delta x\Delta y - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta t\Delta x\Delta y$$

両辺をΔt ($\rho\Delta x$ Δy)で除し，Δt をゼロに近づけると，次の連続の式を得る．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

密度が一定（非圧縮性流体）の場合は，流れが定常か非定常かにかかわらず，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

以上は二次元の流れ場についてのものであるが，三次元の流れ場では，z 方向の速度成分を w とすれば，前述のそれぞれに対応した以下の 2 式を得る．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$